ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TUYẾT MAI

ĐỊNH LÝ FOURIER, ĐỊNH LÝ STURM VỀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TUYẾT MAI

ĐỊNH LÝ FOURIER, ĐỊNH LÝ STURM VỀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Văn Hoàng

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Trong chương trình ở bậc phổ thông, học sinh tiếp cận với đa thức từ bậc THCS, đến THPT chuyên. Bài toán đếm số nghiệm của đa thức với hệ số thực và khoanh vùng nghiệm của đa thức một ẩn hệ số thực xuất hiện hầu hết ở trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic quốc tế. Hiện nay các tài liệu về đa thức cũng khá đa dạng và phong phú. Tuy nhiên, đa số đều khó đối với học sinh mới bắt đầu tiếp cận. Vì vậy tôi lựa chọn "Định lý Fourier, Định lý Sturm về nghiệm của đa thức và áp dụng" để nghiên cứu và phục vụ cho học sinh các lớp chuyên toán phổ thông. Để khảo sát số nghiệm của đa thức với các hệ số thực luận văn đã sử dụng quy tắc Fourier và quy tắc De Gua đếm số lần đổi dấu và số lần ổn định dấu của các dấu trong đa thức để xác định số nghiệm thực và số nghiệm ảo của đã thức đã cho. Tiếp theo luận văn sẽ trình bày định lý Budan-Fourier để khảo sát về số nghiệm của đa thức trong một khoảng cho trước. Và sau đó luận văn sẽ xét các hàm mở rộng hơn sử dụng quy tắc Budan, định lý của Fourier để khảo sát số nghiệm cho hàm khả vi k lần. Cuối cùng trong luận văn định lý Hurwitz và định lý Sturm xác định số nghiệm của một đa thức thực dựa vào sự phân bố dấu của dãy các hệ số thực của đa thức đã cho.

Luận văn gồm 2 chương:
Chương 1. Trình bày một số kiến thức liên quan để chứng minh cho các định lý ở chương 2.
Chương 2. Trình bày một số quy tắc, định lý về nghiệm thực của đa thức và một số ví dụ áp dụng các quy tắc để xác định số nghiệm của đa thức.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới PGS.TS. Nguyễn Văn Hoàng, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn, cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy cô, những người đã tận tâm giảng dạy và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn. Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2019
Tác giả

Nguyễn Thị Tuyết Mai

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm nhắc lại một số kiến thức cơ bản được sử dụng trong luận văn, kiến thức này tham khảo ở một số tài liệu [7], [?].

1.1 Sơ lược về không gian metric

Định nghĩa 1.1.1. (i) Cho X là một tập hợp. Một *ánh xạ khoảng cách d* xác định trên X là một ánh xạ $d : X \times X \to [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z \in X$: (1) $d(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$; (2) $d(x, y) = d(y, x)$; (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(ii) Một *không gian metric* là một cặp (X, d) trong đó X là tập hợp và d là một ánh xạ khoảng cách xác định trên X.

Ví dụ 1.1.2. +) Tập số thực $\mathbb{R}$ với ánh xạ khoảng cách $d(x, y) = |x - y|$ là một không gian metric.

+) Tập $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ cùng với ánh xạ khoảng cách

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

cũng là một không gian metric.

Định nghĩa 1.1.3. Cho không gian metric (X, d).

(i) Cho điểm $x \in X$ và số thực $\varepsilon > 0$. Một hình *cầu mở* $B(x, \varepsilon)$ được xác định bởi

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

(ii) Một tập con U của X được gọi là *tập mở* nếu mọi $x \in U$ đều tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Một tập con V của X được gọi là *tập đóng* nếu $X \setminus V$ là tập mở.

(iii) Một *lân cận* của điểm $x \in X$ là bất kì tập con A nào của X thỏa mãn hai điều kiện: (a) $x \in A$; (b) A chứa một cầu mở $B(x, \varepsilon)$ (với số thực $\varepsilon > 0$ nào đó).

(iv) Một dãy (x_n) trong không gian metric (X, d) gọi là *hội tụ* về $a \in X$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ để $d(x_n, a) < \epsilon$ với mọi $n > n_0$.

(v) Không gian metric (X, d) gọi là *compact* nếu mọi dãy trong X đều có một dãy con hội tụ trong X.

Ví dụ 1.1.4. Tập $\overline{\mathbb{R}}$ cùng với ánh xạ khoảng cách $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ là một không gian metric compact.

Định nghĩa 1.1.5 (Điểm giới hạn)**.** Cho tập hợp A trong không gian metric (X, d) và $x \in X$. Ta nói x là *điểm giới hạn (hoặc điểm dính)* của A nếu mọi lân cận U của x đều có giao với A tại một ít nhất một điểm khác x.

Định nghĩa 1.1.6 (Điểm cô lập)**.** Cho tập hợp A trong không gian metric (X, d) và $x \in A$. Ta nói x là *điểm cô lập* của A nếu tồn tại lân cận U của x mà U không giao với A tại bất kì điểm nào khác x.

1.2 Hàm liên tục, hàm khả vi

Tiếp theo ta nhắc lại một số khái niệm của hàm liên tục đối với hàm số biến số thực.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $X \subseteq \mathbb{R}$, hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ và điểm $x_0 \in X$. Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bao giờ cũng tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in X : |x - x_0| < \delta\}$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ thì ta nói hàm f liên tục tại x_0. Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in X$ thì ta nói f liên tục trên X.

Như vậy, một cách phát biểu tương đương, ta thấy f là hàm số liên tục tại điểm x_0 nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho $A \subseteq \mathbb{R}$, hàm số $f : A \to \mathbb{R}$ gọi là liên tục bên phải tại điểm $x_0 \in A$ nếu mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A : x_0 \leq x < x_0 + \delta\}$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tương tự ta nói f liên tục bên trái tại $x_0 \in A$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $x \in \{x \in A : x_0 - \delta \leq x < x_0\}$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Như vậy hàm số $f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x_0 \in A$ khi và chỉ khi f liên tục bên phải và liên tục bên trái tại x_0.

Định nghĩa 1.2.3. Cho hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nếu f liên tục trên (a, b), liên tục bên phải tại điểm a và liên tục bên trái tại điểm b thì ta nói f liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Tiếp theo nhắc lại các khái niệm về hàm khả vi. Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của điểm $x_0 \in \mathbb{R}$. Cho x_0 một số gia Δx khá bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia đối số Δx tại điểm x_0.

Định nghĩa 1.2.4. Nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm f đối với x tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$; ta cũng nói rằng hàm f khả vi tại x_0. Như vậy, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Định nghĩa 1.2.5. Cho U là tập hợp mở trong $\mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên U. Hàm f được gọi là khả vi trên U nếu f khả vi tại mọi điểm của U. Khi đó ta cũng nói hàm số f có đạo hàm f' trên U.

Tiếp theo ta nhắc lại định lý giá trị trung bình cho hàm khả vi.

Định lý 1.2.6 (Định lí Lagrange)**.** Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng (a, b). Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$, sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Định lý 1.2.7 (Định lí Cauchy)**.** Giả sử f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có các đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng (a, b), ngoài ra $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Định lí Lagrange là trường hợp riêng của Định lý Cauchy với $g(x) = x$.

Định nghĩa 1.2.8. Nếu giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại và hữu hạn thì giới hạn đó gọi là đạo hàm bên trái của $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $f_-^{'}(x_0)$. Nếu giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tồn tại và hữu hạn thì giới hạn đó gọi là đạo hàm bên phải của $f(x)$ tại x_0, ký hiệu $f_+^{'}(x_0)$.

Quy tắc 1.2.9. Quy tắc L'Hospital (đọc là Lô-pi-tan) là một quy tắc trong toán học dùng để khử các dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ khi tính giới hạn và nhiều ứng dụng khác. Quy tắc L'Hospital được phát biểu như sau: Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ thì nó có giới hạn bằng giới hạn của $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại.

Định lý 1.2.10. *Giả sử f và g là các hàm liên tục trong tập $[a, b]$ và khả vi trong (a, b). Giả sử $g'(x)$ khác 0 trong (a, b), và $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ là tồn tại, và $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Khi đó*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.3 Ước chung lớn nhất của hai đa thức

Mục này ta xét k là một trường và xét các đa thức trong vành $k[x]$.

Định lý 1.3.1 (Định lý phép chia và dư). *Cho các đa thức $f(x), g(x) \in k[x]$ với $g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất cặp $q(x), r(x) \in k[x]$ sao cho*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

trong đó nếu $r(x) \neq 0$ thì $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$. Ta gọi $q(x)$ là thương *và gọi $r(x)$ là* phần dư *của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$.*

Định nghĩa 1.3.2 (Ước của đa thức)**.** Trong phép chia $p(x)$ cho $q(x)$, nếu phần dư $r(x)$ đồng nhất bằng 0 thì ta nói rằng đa thức $p(x)$ *chia hết cho* đa thức $q(x)$. Như vậy, $p(x)$ chia hết cho $q(x)$ nếu tồn tại đa thức $s(x)$ sao cho $p(x) = q(x).s(x)$. Trong trường hợp này ta cũng nói $q(x)$ *chia hết* $p(x)$, hoặc $q(x)$ là một *ước* của $p(x)$.

Định nghĩa 1.3.3 (Ước chung của hai đa thức)**.** Nếu $g(x)$ chia hết $p(x)$ và $g(x)$ chia hết $q(x)$ thì ta nói $g(x)$ là một *ước chung* của $p(x)$ và $q(x)$.

Định nghĩa 1.3.4 (Ước chung lớn nhất)**.** Cho $p(x)$ và $q(x)$ là các đa thức không đồng thời là 0. *Ước chung lớn nhất* của $p(x)$ và $q(x)$ là đa thức $d(x)$ thoả mãn đồng thời các hai điều kiện: (1) $d(x)$ là một ước chung của $p(x)$ và $q(x)$; (2) Nếu $d'(x)$ là một ước chung của $p(x)$ và $q(x)$ thì $d'(x)$ cũng là ước của $d(x)$.

Chú ý 1.3.5 (Thuật toán Euclide)**.** Cho các đa thức $f_0, f_1 \in k[x]$ với $f_1 \neq 0$. Đặt f_2 là phần dư khi chia f_0 cho f_1, và tiếp tục bằng quy nạp, ta đặt f_{i+1} là phần dư khi chia f_{i-1} cho f_i (nếu $f_i \neq 0$).

Rõ ràng là dãy $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ (dãy này gọi là *dãy các phần dư đa thức* của f_0, f_1) là hữu hạn, vì nếu trái lại thì mọi $f_i \neq 0$ nên ta có dãy giảm vô hạn các số tự nhiên

$$\deg(f_1) > \deg(f_2) > \ldots > \deg(f_i) > \ldots$$

điều này là không xảy ra. Lấy $d(x)$ là phần dư f_r cuối cùng khác không, và chú ý rằng $r \leq \min\{\deg(f_0), \deg(f_1)\}$. Khi đó $d(x)$ chính là ước chung lớn nhất của f_0 và f_1.